

УДК 621.01

Антонюк Е. Я.
Забуга А. Г.**О ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЖЕННОСТИ МАШИН С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ЦЕПЯМИ**

Разработка методов синтеза технологических систем с повышенными показателями надежности и энергоэффективности является актуальной задачей современной науки и техники. Одно из направлений исследований в этой области заключается в изучении влияния статической неопределенности на энергопотребление и долговечность машин с параллельными кинематическими цепями, широко распространенными в металлургических машинах. При этом могут возникать избыточные статические и динамические нагрузки в звеньях машины [1]. Движение в подобных системах осуществляется за счет деформации или повышенных зазоров, что в итоге приводит к снижению надежности [2, 3, 4].

Целью работы является изучение влияния статической неопределенности на динамическую нагруженность и другие технические показатели применительно к стану холодной прокатки труб (ХПТ-75) [5]. Его главная часть (рис. 1) представляет собой спаренный дезаксиальный кривошипно-ползунный механизм (5, 6 – кривошпы, 3, 4 – шатуны, 1 – клеть с соответствующими кинематическими парами). Шатун 3 и клеть 1 с точки зрения структуры [1] являются пространственной диадой, число степеней свободы которой должно быть равно нулю. Три кинематические пары диады должны накладывать 12 условий связи, например $5 + 4 + 3$. Такой одноконтурный четырехзвенный механизм (диада, кривошип 5 и станина 2) статически определим, пассивные натяжения в нем отсутствуют.

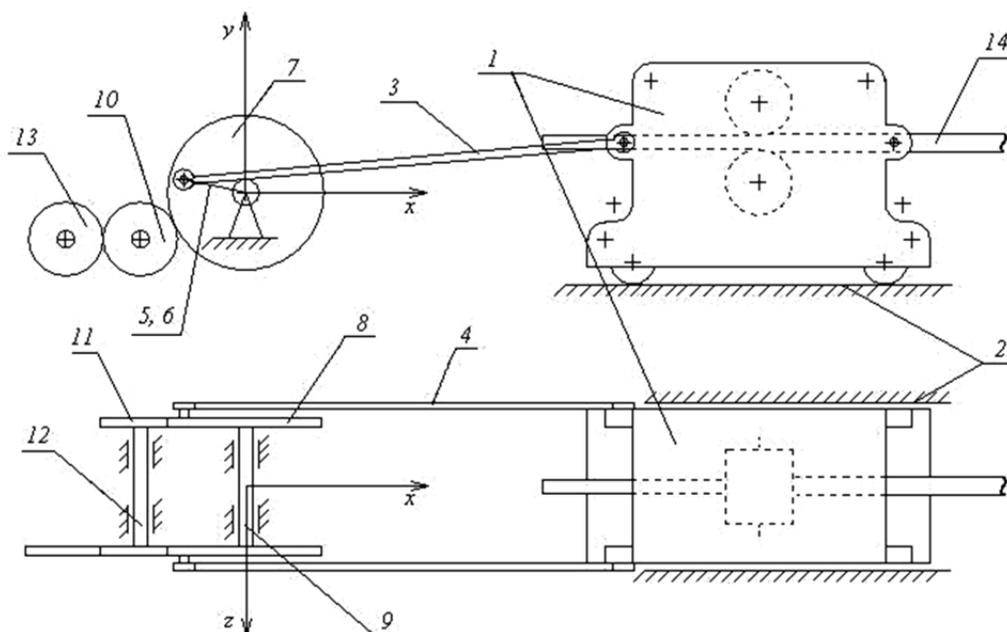


Рис. 1. Расчетная схема привода клетки стана ХПТ-75

Координата клетки при отсутствии деформаций звеньев представляет зависимость $x = f(\varphi)$, где φ – угол наклона кривошипа к Ox . Для симметрии передаваемой на клеть нагрузки введен второй шатун 4 и кривошип 6 с аналогичными кинематическими парами, так что образуется параллельная ветвь, координата x (клетки) которой вторично вычисляется согласно той же зависимости. Этим в систему вносится повторяющаяся (пассивная) связь. В идеальном механизме при абсолютно твердых звеньях повторяющаяся связь не окажет

дополнительного влияния на кинематику и нагруженность. Однако в связи с неизбежными отклонениями размеров при изготовлении деталей (в пределах установленных технической документацией допусков) пассивная связь окажется реальной. Движение клетки станет возможным только за счет зазоров или деформации. В замкнутых контурах механизма возникнут дополнительные натяжения, увеличится работа сил трения [6]. В менее очевидных случаях статическую неопределенность устанавливают на основе функционального определителя $\det[\partial F_i/\partial x_j]$, $i, j = \overline{1, n}$, где F_i – уравнения связей [1, 7].

Исключить упомянутый дефект структуры возможно введением между клетью и шатунами дополнительного (уравнительного) звена, с которым шатуны соединяются теми же кинематическими парами, а клеть – двумя дополнительными шарнирами, центры которых расположены на общей вертикали [8].

Модель строилась, исходя из предположения о том, что звенья, имеющие массу, являются недеформируемыми, а те, которые могут упруго деформироваться, не имеют массы. Такая модель позволяет достаточно точно описать динамику системы [9], избежав необходимости решения уравнений в частных производных.

Приведем параметры системы: масса клетки 1 и момент инерции относительно центральной вертикальной оси $m = 7800$ кг, $I_{\text{кл}} = 2770$ кг · м², расчетная ширина и длина клетки $\Delta l_{\text{кл}} = 0,864$ м, $\Delta h = 1,5$ м, зазор между клетью 1 и боковыми направляющими 2 станины $\Delta L = 0,0025$ м, приведенный коэффициент трения скольжения клетки $\mu = 0,05$; номинальная длина шатунов 3 и 4 $l = 2,45$ м, фактические их длины, обусловленные погрешностями изготовления $l_1 = l + \Delta l$, $l_2 = l - \Delta l$, $\Delta l = 0,0012$ м, продольная жесткость $k = 9,4 \cdot 10^7$ Н/м; длины кривошипов 5, 6, совмещенных с колесами 7 и 8, $r - \Delta r/2$, $r + \Delta r/2$, $r = 0,35$ м, $\Delta r = 0,001$ м; радиусы начальных окружностей зубчатых колес 7 и 8 $r_3 = 0,546$ м, их центральные моменты инерции $I = 130$ кг · м²; крутильная жесткость вала 9 $c_3 = 6,9 \cdot 10^6$ Н · м; изгибные жесткости зубьев колес $k_3 = 3,44 \cdot 10^9$ Н/м. Шарнирное закрепление шатунов на клетке размещено на высоте $h = 0,28$ м над осью зубчатых колес 7 и 8. Колеса 7 и 8 зацепляются с 10 и 11 ($r_2 = 0,21$ м), соединенными валом 12 с крутильной жесткостью $c_2 = 8,6 \cdot 10^6$ Н · м. Привод осуществляется через зубчатое колесо 13 ($r_1 = 0,21$ м). При прокатке на трубу 14 действует усилие $F_{\text{пр}}$. Угол поворота $\varphi_1(t)$ зубчатого колеса 13 выбран таким, чтобы первые две производные ($\dot{\varphi}_1(t) = \omega(t)$ и $\ddot{\varphi}_1(t)$) не имели разрывов в точках $t = 0$ и $t = t_1$, где t_1 – начало стационарного режима. Кроме того, было обусловлено отсутствие на интервале $0 < t < t_1$ нулей углового ускорения $\ddot{\varphi}_1(t)$. Полученное выражение для $\varphi_1(t)$ имеет вид:

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \frac{2\omega_0}{t_1^2} t^3 - \frac{2\omega_0}{t_1^3} t^4 + \frac{3\omega_0}{5 t_1^4} t^5; & t < t_1; \\ -\frac{2}{5} \omega_0 t_1 + \omega_0 t; & t \geq t_1. \end{cases} \quad (1)$$

Колеса 7 и 8 имеют по одной степени свободы, т. е. могут совершать независимые вращения вокруг оси z . Клеть 1 обладает двумя степенями свободы – поступательной, вдоль оси x и вращательной вокруг Oy с углом поворота α . В целом такая динамическая система описывается четырьмя дифференциальными уравнениями второго порядка [9, 10]:

$$\begin{aligned} I\ddot{\varphi}_{31} &= c_3(\varphi_{32} - \varphi_{31}) - k_3(\varphi_{31}r_3 + \varphi_{21}r_2)r_3 + k\Delta l_1 p_1 + D_{31}; \\ I\ddot{\varphi}_{32} &= c_3(\varphi_{31} - \varphi_{32}) - k_3(\varphi_{32}r_3 + \varphi_{22}r_2)r_3 + k\Delta l_2 p_2 + D_{32}; \\ m\ddot{x} &= -k\Delta l_1 \cos \varphi_{41} - k\Delta l_2 \cos \varphi_{42} - F_{\text{тр}} - F_{\text{пр}} + D_{\text{кл}}; \\ I_{\text{кл}}\ddot{\alpha} &= (k\Delta l_2 \cos \varphi_{42} - k\Delta l_1 \cos \varphi_{41}) \frac{\Delta l_{\text{кл}}}{2} \cos \alpha - M_{\text{упр}} - M_{\text{тр}} + D_4. \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) слагаемые $c_3(\varphi_{32} - \varphi_{31})$, $k_3(\varphi_{31}r_3 + \varphi_{21}r_2)r_3$ и $k_3(\varphi_{32}r_3 + \varphi_{22}r_2)r_3$ представляют собой моменты сил упругости, действующие на колеса 7 и 8 со стороны вала 9, и на колеса 10 и 11 со стороны 7 и 8; φ_{21} и φ_{22} – углы поворота колес 10 и 11. Слагаемые $k\Delta l_1 p_1$ и $k\Delta l_2 p_2$ – моменты сил упругости, действующие на колеса 7 и 8 со стороны шатунов; Δl_1 и Δl_2 – абсолютные удлинения шатунов 3 и 4; p_1 и p_2 – плечи векторов сил упругости

шатунов 3 и 4. Слагаемые $k\Delta l_1 \cos \varphi_{41}$ и $k\Delta l_2 \cos \varphi_{42}$ – проекции сил упругости в шатунах 3 и 4 на Ox . φ_{41} и φ_{42} – углы наклона шатунов 3 и 4 к оси Ox . $F_{тр}$ – сила трения, действующая на клеть 1 при поступательном движении вдоль направляющей.

Слагаемое $(k\Delta l_2 \cos \varphi_{42} - k\Delta l_1 \cos \varphi_{41}) \frac{\Delta l_{кл}}{2} \cos \alpha$ – вращающий момент относительно Oy , действующий на клеть 1 со стороны шатунов. $M_{тр}$ – момент сил трения, обусловленный поворотом клетки 1 вокруг оси Oy . $M_{упр}$ – момент сил упругости, действующий на клеть, после ее входа в контакт с вертикальными стенками основания 2 вследствие поворота на угол δ . Слагаемые D_{31} , D_{32} , $D_{кл}$ и D_4 представляют собой соответствующие диссипативные сопротивления. Угол δ , а также плечи p_1 и p_2 и углы наклона шатунов φ_{41} и φ_{42} определяются из геометрических соотношений.

Поскольку зубчатые колеса 10 и 11 полагаются безынерционными (моменты инерции равны нулю), то их углы поворота φ_{21} и φ_{22} можно исключить из дифференциальных уравнений путем соответствующих алгебраических преобразований.

Для описания разрывных функций [11] в модели использовалась процедура «сглаживания» [12], что позволило системе с переменной структурой привести к системе с постоянной структурой. Это позволило исключить переход от одной подсистемы к другой с определением каждый раз начальных условий на основании значений фазовых координат в конце предыдущей подсистемы. Так функция $\text{sign } \theta$ заменялась гладкой с бесконечным количеством производных функцией вида $\frac{2}{\pi} \arctg \beta \theta$, где β – достаточно большое число. Усилие прокатки $F_{пр}$ представлено в виде «сглаженной» функции:

$$F_{пр} = \frac{1}{4} \cdot F_0 \cdot \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctg \left(\beta_1 \cdot (x - x_{пр})\right)\right) \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctg(\beta_2 \cdot \dot{x})\right), \quad (3)$$

где $F_0 = 29400$ Н; $\beta_1 = 1000$ м⁻¹; $x_{пр} = 2,2$ м и $\beta_2 = 1000$ с · м⁻¹.

Диссипативные сопротивления D_{31} , D_{32} , $D_{кл}$ и D_4 определены путем дифференцирования по времени соответствующих выражений для упругих деформаций и замены соответствующих жесткостей на коэффициенты диссипации. Были приняты следующие значения коэффициентов диссипации шатунов, вала 9, вала 12 и зубчатых зацеплений: $H = 188000 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$, $H_{с3} = 13800 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{рад}}$, $H_{с2} = 17200 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{рад}}$ и $H_{к3} = 68800 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$.

Рассмотрим сначала динамику статически неопределимой системы. Для нее абсолютные удлинения Δl_1 и Δl_2 шатунов 3 и 4 могут быть определены, исходя из геометрии системы, т. е. с учетом поворота клетки 1 на угол α вокруг оси y , можем записать:

$$\Delta l_1 = \left(x + \frac{\Delta l_{кл}}{2} \sin \alpha + \left(r - \frac{\Delta r}{2}\right) \cos \varphi_{31}\right) \sqrt{1 - \frac{\left(h - \left(r - \frac{\Delta r}{2}\right) \sin \varphi_{31}\right)^2}{l_1^2}} + \frac{\left(h - \left(r - \frac{\Delta r}{2}\right) \sin \varphi_{31}\right)^2}{l_1} - l_1; \quad (4)$$

$$\Delta l_2 = \left(x - \frac{\Delta l_{кл}}{2} \sin \alpha + \left(r + \frac{\Delta r}{2}\right) \cos \varphi_{32}\right) \sqrt{1 - \frac{\left(h - \left(r + \frac{\Delta r}{2}\right) \sin \varphi_{32}\right)^2}{l_2^2}} + \frac{\left(h - \left(r + \frac{\Delta r}{2}\right) \sin \varphi_{32}\right)^2}{l_2} - l_2. \quad (5)$$

Для момента сил упругости $M_{упр}$, возникающего при повороте клетки на угол $|\alpha| \geq \delta$, применим процедуру сглаживания:

$$M_{упр} = \frac{1}{2} \left(c_{кл} \left(\alpha - \delta \frac{2}{\pi} \arctg(\beta_3 \cdot \alpha)\right) + H_{кл} \dot{\alpha}\right) * \left(\frac{2}{\pi} \arctg(\beta_4 \cdot (|\alpha| - \delta)) + 1\right), \quad (6)$$

где $\beta_3 = 1 \cdot 10^6$ рад⁻¹, $\beta_4 = 1 \cdot 10^8$ рад⁻¹; $c_{кл} = 1 \cdot 10^8$ Нм – приведенная крутильная жесткость; $H_{кл} = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{рад}}$ – коэффициент диссипативных сопротивлений.

Сила трения $F_{тр}$ представлена двумя реакциями. Одна из них зависит от mg клетки 1 и вертикальной составляющей усилий в шатунах; вторая – реакции при контакте клетки 1 с боковой направляющей 2. Используя гладкую аппроксимацию, можем записать:

$$F_{\text{тр}1} = \frac{2\mu}{\pi} (mg + k\Delta l_1 \sin \varphi_{41} + k\Delta l_2 \sin \varphi_{42} + H \frac{d\Delta l_1}{dt} \sin \varphi_{41} + H \frac{d\Delta l_2}{dt} \sin \varphi_{42}) \operatorname{arctg}(\beta_2 \cdot \dot{x}),$$

$$F_{\text{тр}2} = \frac{\mu}{\pi} \left(k\Delta l_2 \cos \varphi_{42} - k\Delta l_1 \cos \varphi_{41} + H \frac{d\Delta l_2}{dt} \cos \varphi_{42} - H \frac{d\Delta l_1}{dt} \cos \varphi_{41} \right) * \\ * \frac{\Delta l_{\text{кл}}}{\Delta h - \Delta l_{\text{кл}} \operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(\beta_4 \cdot (|\alpha| - \delta)) + 1 \right) \operatorname{arctg}(\beta_2 \cdot \dot{x}). \quad (7)$$

Итоговая сила трения: $F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2}$.

Момент сил трения $M_{\text{тр}}$ при вращении клетки 1 вокруг O можно определить, как произведение силы реакции на приведенный коэффициент пропорциональности $\mu_{\text{вр}}$, зависящий от коэффициента трения скольжения μ . Полагая, что опоры клетки 1 имеют прямоугольную форму длиной, равной длине клетки Δh и шириной 0,1 м, и что каждая из ножек находится на расстоянии $\Delta l_{\text{кл}}/2 - 0,1$ м от вертикальной оси симметрии клетки 1, а также, что распределение силы реакции по поверхности соприкосновения клетки 1 и направляющей 2 равномерно, имеем:

$$\mu_{\text{вр}} = \frac{4\mu}{S} \int_0^{\Delta h/2} d\xi \int_{\Delta l_{\text{кл}}/2 - 0,1 \text{ м}}^{\Delta l_{\text{кл}}/2} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} d\eta, \quad (8)$$

где $S = 0,3 \text{ м}^2$ – площадь контакта клетки 1 и направляющей 2. Момент сил трения:

$$M_{\text{тр}} = \frac{2\mu_{\text{вр}}}{\pi} (mg + k\Delta l_1 \sin \varphi_{41} + k\Delta l_2 \sin \varphi_{42} + \\ + H \frac{d\Delta l_1}{dt} \sin \varphi_{41} + H \frac{d\Delta l_2}{dt} \sin \varphi_{42}) \operatorname{arctg}(\beta_5 \cdot \dot{\alpha}), \quad (9)$$

где $\beta_5 = 1 \cdot 10^5 \frac{\text{с}}{\text{рад}}$.

Полагалось, что в начальный момент времени клетка 1 пребывает в своем крайнем левом положении, а вал 9 не деформирован. Следовательно, $\varphi_{31} \approx \varphi_{41}$, $\varphi_{32} \approx \varphi_{42}$ и $\varphi_{31} = \varphi_{32}$. В результате для $t = 0$ можем записать начальные условия:

$$\varphi_{31}(t = 0) = \varphi_{32}(t = 0) = -\frac{1}{2} \left(\operatorname{arcsin} \frac{h}{l_1 - r + \frac{\Delta r}{2}} + \operatorname{arcsin} \frac{h}{l_2 - r - \frac{\Delta r}{2}} \right); \quad (10)$$

$$x(t = 0) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(l_1 - r + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - h^2} + \sqrt{\left(l_2 - r - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - h^2} \right). \quad (11)$$

Начальный угол $\alpha(t = 0)$ вычислялся, исходя из геометрии системы, в соответствии с (10) и (11). Кроме того, принималось, что в начальный момент времени $t = 0$ скорости нулевые.

Явный вид системы (2) получен путем использования соотношений (1), (3)–(9) с выполнением необходимых математических операций и добавления начальных условий (10)–(11) и $\alpha(t = 0)$.

Перейдем к рассмотрению системы, в которой исключена статическая неопределенность в контуре 7, 9, 8, 4, 1, 3, а значит, силы упругости в шатунах 3 и 4 равны (следовательно, $\Delta l_1 = \Delta l_2$, а также $\alpha = 0 = \text{const}$).

Поскольку поворот клетки вокруг вертикальной центральной оси отсутствует, сила трения, действующая на клетку будет $F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}1}$, где $F_{\text{тр}1}$ определяется выражением (7).

Пусть x_1 и x_2 – координаты по оси x точек, в которых шатуны 3 и 4 крепятся к уравнительному звену. Учитывая, что клетка 1 симметрична относительно плоскости xu , можем для координаты клетки x записать:

$$x = (x_1 + x_2)/2. \quad (12)$$

Абсолютные удлинения Δl_1 и Δl_2 будут выражаться через x_1 и x_2 соотношениями, подобными (4) и (5):

$$\Delta l_1 = \left(x_1 + \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right) \cos \varphi_{31} \right) \sqrt{1 - \frac{\left(h - \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right) \sin \varphi_{31} \right)^2}{l_1^2} + \frac{\left(h - \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right) \sin \varphi_{31} \right)^2}{l_1}} - l_1; \quad (13)$$

$$\Delta l_2 = \left(x_2 + \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \cos \varphi_{32} \right) \sqrt{1 - \frac{\left(h - \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \sin \varphi_{32} \right)^2}{l_2^2} + \frac{\left(h - \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \sin \varphi_{32} \right)^2}{l_2^2}} - l_2. \quad (14)$$

Окончательные выражения для Δl_1 и Δl_2 были получены путем исключения x_1 и x_2 из уравнений (12), (13) и (14).

Получаем систему из трех дифференциальных уравнений также как и в предыдущем случае. Начальные условия для нее были, как и раньше, выбраны в виде (10)–(11), но без $\dot{\alpha}(t=0) = 0$.

Система дифференциальных уравнений (2) решалась численно методом Рунге-Кутты четвертого и пятого порядка точности при помощи MatLab. Для сравнения немодифицированной и модифицированной систем, был выбран момент сил упругости вала 9 при наличии погрешности изготовления кривошипа $\Delta r = 1 \cdot 10^{-3}$ м (рис. 2).

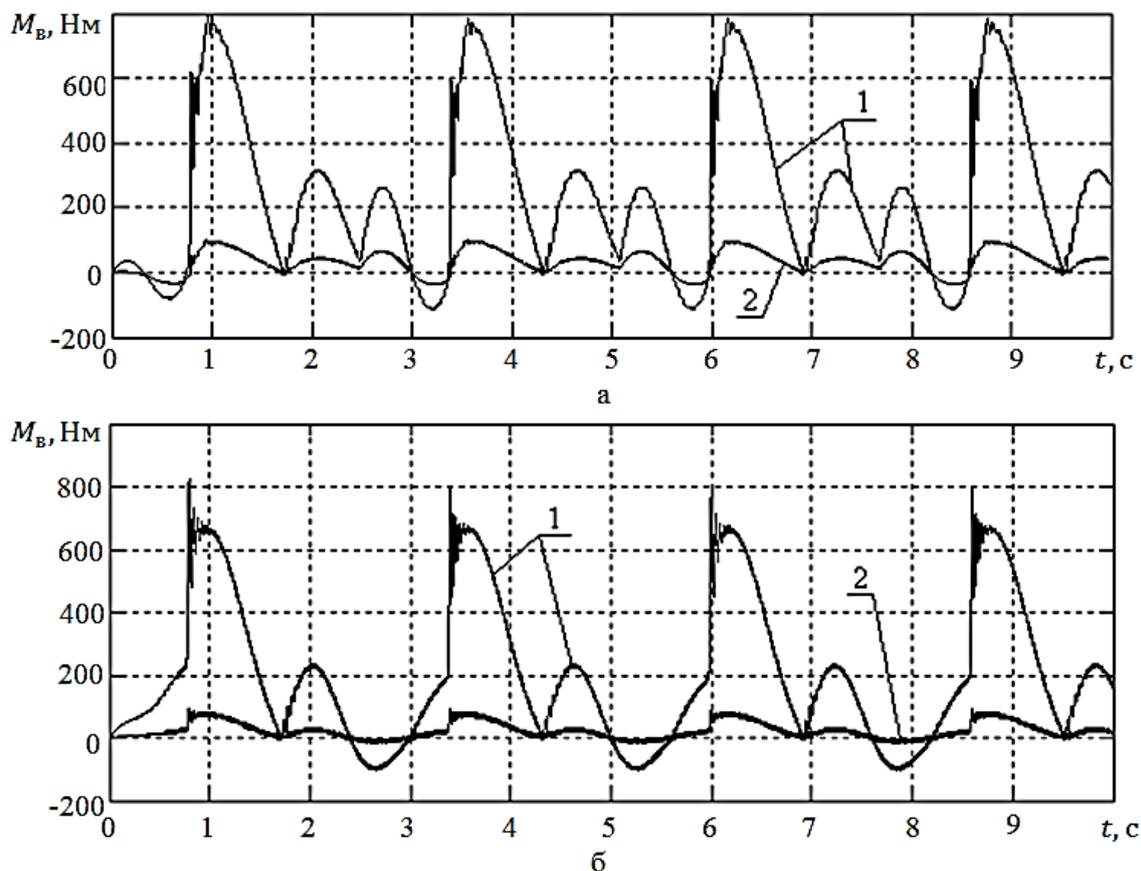


Рис. 2. Графики зависимости момента сил упругости вала 9 от времени:
а – немодифицированная система; б – модифицированная система

Возрастание нагрузок на обоих графиках рис. 2. соответствует процессу прокатки. Интересным является то, что в моменты взаимодействия валков с трубой 14 значения M_B для модифицированной системы будут несколько выше, чем для немодифицированной (линии, обозначенные «1»). Этот, парадоксальный, на первый взгляд, результат можно объяснить тем, что в системе имеется второй статически неопределимый замкнутый контур (колеса 8, 9, 10, 11 и валы 9 и 12), который тоже чувствителен к погрешностям изготовления и отсутствию симметрии. Поэтому на нагрузке на валу 9 в некоторой мере сказывается неодинаковость длин шатунов и кривошипов и, в основном, то, что на зубчатое колесо 7 передача

осуществляется через колесо 10, а на колесо 8 – через колесо 10, вал 12 и колесо 11. При развязке этой статической неопределенности нагрузки на валу 9 значительно уменьшаются (линии, обозначенные «2»).

В качестве следующей характеристики, использовавшейся для сравнения модифицированной и немодифицированной систем, были выбраны силы упругости в шатунах при единственно учтенной погрешности изготовления кривошипов $\Delta r = 1 \cdot 10^{-3}$ м. Графики зависимости сил упругости в шатунах 3 и 4 изображены на рис. 3:

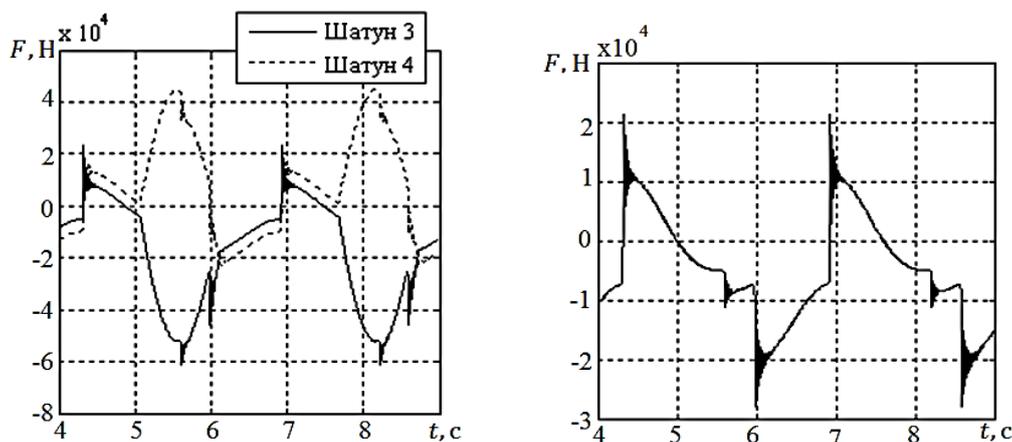


Рис. 3. Графики зависимости сил упругости в шатунах:
а – немодифицированная система; б – модифицированная система

В некоторых интервалах времени силы упругости в шатунах имеют разные знаки (один из них выполняет полезную работу, а второй наоборот). Это свидетельствует о пассивном натяжении контура звеньев, имеющем место даже при отсутствии усилия прокатки. Кроме того, когда силы упругости в шатунах 3 и 4 одного знака, то сила в шатуне 4 превосходит по амплитуде силу в шатуне 3. В случае модифицированной системы (рис. 3, б) силы упругости в шатунах 3 и 4 будут одинаковы. Следовательно, влияние погрешностей изготовления деталей на динамическую нагруженность будет существенно только в случае немодифицированной системы.

Для сравнения энергоэффективности модифицированной и немодифицированной систем использована доля энергии ΔE (рис. 4), дополнительно расходуемая на потери в статически неопределенной системе.

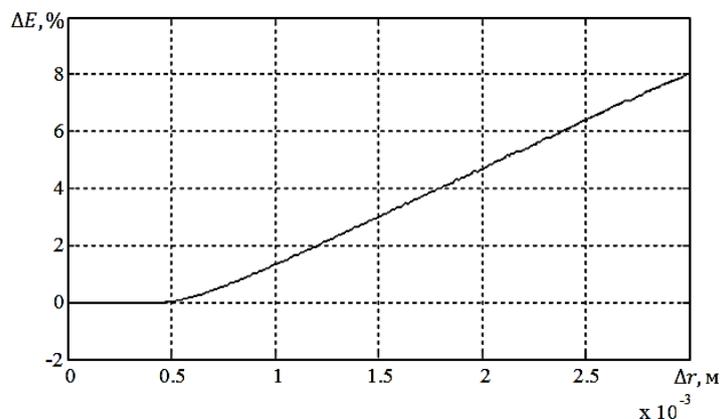


Рис. 4. Доля энергии ΔE , как функция погрешности длин кривошипов Δr

В данном случае она затрачивается на преодоление сил трения, возникающих при контакте клетки 1 с боковыми стенками направляющей 2, и представлена как функция погрешности заводского изготовления Δr кривошипа в интервале от 0 до $3 \cdot 10^{-3}$ м.

Как можно видеть из рис. 4, зависимость графически представлена двумя основными участками – первый соответствует ситуации, когда Δr недостаточно велико, чтобы возникло заклинивание ($\Delta r < 5 \cdot 10^{-4}$ м). При больших значениях ΔE возрастает с увеличением Δr почти линейно и при $\Delta r = 3 \cdot 10^{-3}$ м достигает около 8 %.

Даже такой упрощенный учет погрешностей изготовления одной пары соответствующих звеньев указывает на хронические недостатки статически неопределимых механизмов. В реальных случаях все соответствующие одноименные элементы параллельных кинематических цепей имеют взаимные отклонения размеров и форм и их суммарный вклад в избыточную нагруженность машины должен оцениваться статистически с учетом вероятностного отклонения размеров. Это же относится к другим статически неопределимым группам, например упомянутым пространственным диадам.

ВЫВОДЫ

На основе проведенных расчетов динамической нагруженности статически неопределимой системы подтверждена ее чувствительность к неточностям изготовления звеньев параллельных кинематических цепей. Выполнено сравнение некоторых показателей динамических процессов в статически неопределимой и определимой системах. На конкретном примере показана более низкая динамическая нагруженность, а, следовательно, лучшие показатели энергоэффективности и долговечности системы без пассивных связей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кожевников С. Н. *Основания структурного синтеза механизмов* / С. Н. Кожевников. – Киев : Наук. думка, 1979. – 230 с.
2. Antonyuk E. Ya. *Dynamic System of an Engine with Spatially Rocking Links: a Mathematical Model* / E. Ya. Antonyuk, V. A. Sakharnov, N. I. Koval // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – Vol. 46 (№ 9). – P. 1039–1049.
3. *Диагностика и динамика прокатных станков* / В. В. Веренев, В. И. Большаков, А. Ю. Путники, А. А. Коринь, С. В. Мацко. – Днепропетровск : ИМА-пресс, 2007. – 144 с.
4. Бобух И. А. *Повышение надежности и увеличение срока службы приводов прокатных станков за счет применения износостойкого крепления упругого стержневого элемента* / И. А. Бобух, А. С. Цуруканов, А. С. Селедцов // *Прикл. механика.* – 1985. – Том. 21. – № 1. – С. 91–97.
5. *Машины и агрегаты металлургических заводов. В трех томах. Т. 3.* / А. И. Целиков, П. И. Полухин, В. М. Гребеник [и др.]. – М. : Металлургия, 1981. – 576 с.
6. Karnaukhov V. G. *Active Damping of the Resonant Vibrations of a Flexible Cylindrical Panel with Sensors and Actuators* / V. G. Karnaukhov, Ya. V. Tkachenko // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – Vol. 47 (№ 6). – P. 131–139.
7. Морошкин Ю. Ф. *Основы аналитической теории механизмов* / Ю. Ф. Морошкин // *Труды С ТММ.* – 1954. – Том. 14. – Вып. 54. – С. 25–50.
8. Legeza V. P. *Dynamics of Vibration Isolation System with a Quasi-Isochronous Roller Shock Absorber* / V. P. Legeza // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – Vol. 47 (№ 3). – P. 121–131.
9. Кожевников С. Н. *Динамика нестационарных процессов в машинах* / С. Н. Кожевников. – Киев : Наук. думка, 1986. – 288 с.
10. Plakhtienko N. P. *Vibrations of a Rigid Body with a Controlled Frictional Electromagnetic Seismic Damper: Nonlinear Model* / N. P. Plakhtienko, M. I. Mikhailova, A. T. Zabuga // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – Vol. 46 (№ 1). – P. 94–114.
11. Филиппов А. Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью* / А. Ф. Филиппов. – М. : Наука, 1985. – 224 с.
12. Антонюк Е. Я. *Исследование некоторых механизмов переменной структуры методом аппроксимаций* / Е. Я. Антонюк, С. В. Зубарев // *Прикл. механика.* – 1985. – Том. 21. – № 1. – С. 91–97.

Антонюк Е. Я. – канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник ИМех НАНУ;

Забуга А. Г. – инженер ИМех НАНУ.

ИМех НАНУ – Институт механики им. С. П. Тимошенко Национальной академии наук Украины, г. Киев.

E-mail: model@inmech.kiev.ua

Статья поступила в редакцию 05.06.2012 г.